11η Άσκηση

2022-2023

Έως συνέπειες ΘΜΤ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ για την οποία ισχύει:

$$\left[e^{f(x)}f'(x)-e^{f(x)}\right]^2-2\left[e^{f(x)}f'(x)-e^{f(x)}\right](x-1)\le-(x-1)^2 \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ .}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Να ορίσετε την f ως σύνθεση τριών συναρτήσεων, δείχνοντας αναλυτικά ολόκληρη την διαδικασία.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)=1$ έχει δύο ρίζες μη αρνητικές και μικρότερες του 1.

δ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $\varphi(x)=-x^{2022}$, $x\in\mathbb{R}$ δέχονται μοναδική κοινή εφαπτομένη, την οποία και να βρείτε.

ε) Να ορίσετε την συνάρτηση $g(x)=\dfrac{e^{f(x)}-e^{f(\eta\mu x)}}{x-\eta\mu x}+1$.

στ) Αν $g(x)=\dfrac{e^x-e^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}$, $x\ne0$, τότε να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει $\xi\in(\eta\mu x,x)$ για κάθε $x>0$ τέτοιο ώστε $f(x)=e^{\xi}$.

ii) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

iii) Η εξίσωση $f(x)=1$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.

Στέλιος Μιχαήλογλου – Νίκος Τούντας

Λύση

α) $\left[e^{f(x)}f'(x)-e^{f(x)}\right]^2-2\left[e^{f(x)}f'(x)-e^{f(x)}\right](x-1)\le-(x-1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[e^{f(x)}f'(x)-e^{f(x)}\right]^2-2\left[e^{f(x)}f'(x)-e^{f(x)}\right](x-1)+(x-1)^2\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[e^{f(x)}f'(x)-e^{f(x)}-x+1\right]^2\le 0 \Leftrightarrow \left[e^{f(x)}f'(x)-e^{f(x)}-x+1\right]^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)+1=e^{f(x)}+x \Leftrightarrow \left[e^{f(x)}+x\right]'=e^{f(x)}+x \Leftrightarrow e^{f(x)}+x=ce^x \Leftrightarrow e^{f(x)}=ce^x-x$

Για $x=0: e^{f(0)}=ce^0 \Leftrightarrow c=1$. Επίσης γνωρίζουμε ότι $\ln x<x<e^x$ άρα $e^x>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $e^{f(x)}=e^x-x \Leftrightarrow f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$

β) $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)=\ln\left(e^x-\ln e^x\right)$, $x\in\mathbb{R}$

Έστω οι συναρτήσεις $n(x)=x-\ln x$, $x>0$ και $k(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$

Για το πεδίο ορισμού της σύνθεσης της k με την n έχουμε:

$D_{n\circ k}=\begin{cases} x\in D_k \\ k(x)\in D_n \end{cases}=\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ e^x>0 \end{cases}=\mathbb{R}$ και ισχύει επίσης $(n\circ k)(x)=n(k(x))=e^x-\ln e^x=e^x-x$

Έστω και η συνάρτηση $h(x)=\ln x$, $x>0$

Είναι $D_{h\circ(n\circ k)}=\begin{cases} x\in D_{n\circ k} \\ (n\circ k)(x)\in D_h \end{cases}=\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ e^x-x>0 \end{cases}=\mathbb{R}$ και $\left(h\circ(n\circ k)\right)(x)=\ln\left((n\circ k)(x)\right)=\ln\left(e^x-x\right)=f(x)$

γ) Η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$, $x\in\mathbb{R}$ και $f''(x)=\dfrac{e^x\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x-x\right)^2}=$

$=\dfrac{\cancel{e^{2x}}-xe^x-\cancel{e^{2x}}+2e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}=\dfrac{2e^x-xe^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}$

Παρατηρούμε ότι $f''(0)=1$, επομένως το μηδέν είναι η μία ρίζα. Τώρα θα αποδείξουμε την ύπαρξη άλλης μίας ρίζας με δύο τρόπους.

1ος τρόπος: Η εξίσωση είναι $f''(x)=1 \Leftrightarrow f''(x)-1=0 \Leftrightarrow \left(f'(x)-x\right)'=0$.

Έστω η συνάρτηση $g(x)=f'(x)-x$, $x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο $g'(x)=f''(x)-1$, με $g(0)=g(1)=0$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f''(\xi)=1$

2ος τρόπος: Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την f' στο $[0,1]$ και προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$f''(\xi)=\dfrac{f'(1)-f'(0)}{1-0}=1$

δ) Η $\varphi(x)=-x^{2022}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $\varphi'(x)=-2022x^{2021}$, $x\in\mathbb{R}$

Είναι $\varphi'(x)<0 \Leftrightarrow -2022x^{2021}<0 \Leftrightarrow x^{2021}>0 \Leftrightarrow x>0$

Είναι $\varphi'(x)>0 \Leftrightarrow -2022x^{2021}>0 \Leftrightarrow x^{2021}<0 \Leftrightarrow x<0$

Είναι $\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow -2022x^{2021}=0 \Leftrightarrow x^{2021}=0 \Leftrightarrow x=0$

Επίσης $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x-1}{e^x-x}=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$ και αφού $e^x-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0$.

Επομένως για $x<0$ είναι $f'(x)<0<\varphi'(x)$ και για $x>0$ είναι $f'(x)>0>\varphi'(x)$.

Επομένως μοναδικό πιθανό σημείο που δέχονται κοινή εφαπτομένη είναι το μηδέν αφού $x<0$ είναι $f'(0)=0=\varphi'(0)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο (0,0) είναι $\varepsilon_1: y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow y=f(0)=0$

Η εφαπτομένη της C_φ στο (0,0) είναι $\varepsilon_2: y-\varphi(0)=\varphi'(0)x \Leftrightarrow y=\varphi(0)=0$

Άρα έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη τον άξονα x΄x.

ε) $g(x)=\dfrac{e^{f(x)}-e^{f(\eta\mu x)}}{x-\eta\mu x}+1$

Για να ορίζεται η g πρέπει $\begin{cases} x\in D_f \\ \eta\mu x\in D_f \\ x-\eta\mu x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ \eta\mu x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x\neq 0 \text{ γιατί } |\eta\mu x|\le|x| \text{ με την ισότητα να ισχύει} \\ x\neq 0\end{cases}$

μόνον για $x=0$. Για $x<0$ είναι $|\eta\mu x|<-x \Leftrightarrow x<\eta\mu x<-x$ και για $x>0$ είναι $|\eta\mu x|<x \Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x$

Είναι $g(x)=\dfrac{e^{f(x)}-e^{f(\eta\mu x)}}{x-\eta\mu x}+1=\dfrac{e^{\ln(e^x-x)}-e^{\ln(e^{\eta\mu x}-\eta\mu x)}}{x-\eta\mu x}+1=\dfrac{e^x-x-(e^{\eta\mu x}-\eta\mu x)}{x-\eta\mu x}+1=$

$=\dfrac{e^x-x-e^{\eta\mu x}+\eta\mu x}{x-\eta\mu x}+1=\dfrac{e^x-e^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}-\dfrac{x-\eta\mu x}{x-\eta\mu x}+1=\dfrac{e^x-e^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}-1+1=\dfrac{e^x-e^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}$, $x\neq 0$

στ) i) Έστω $f(t)=e^t$. Η f είναι συνεχής στο $[\eta\mu x, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(\eta\mu x, x)$ με $f'(t)=e^t$.

Σύμφωνα με το ΘΜΤ υπάρχει $\xi\in(\eta\mu x, x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\eta\mu x)-f(x)}{\eta\mu x-x} \Leftrightarrow e^\xi=\dfrac{e^{\eta\mu x}-e^x}{\eta\mu x-x}$

ii) $\eta\mu x<\xi<x \Leftrightarrow e^{\eta\mu x}<e^\xi<e^x \Leftrightarrow e^{\eta\mu x}<\dfrac{e^x-e^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}<e^x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}e^x=1=\lim\limits_{x\to 0}e^{\eta\mu x}$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}=1$.

iii) $f(x)=1 \Leftrightarrow \dfrac{e^x-e^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}=1 \Leftrightarrow e^x-e^{\eta\mu x}=x-\eta\mu x \Leftrightarrow e^x-e^{\eta\mu x}-x+\eta\mu x=0$

Έστω $g(x)=e^x-e^{\eta\mu x}-x+\eta\mu x,\ x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

Έστω ότι η g έχει δύο ρίζες $\rho_1,\rho_2\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ με $\rho_1<\rho_2$.

Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με

$g'(x) = e^x - \sigma\upsilon\nu x e^{\eta\mu x} - 1 + \sigma\upsilon\nu x = (e^x - 1) + \sigma\upsilon\nu x\,(1 - e^{\eta\mu x})$

Επειδή $g(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$.

Όμως $g'(\xi) = (e^\xi - 1) + \sigma\upsilon\nu\xi\,(1 - e^{\eta\mu\xi}) > 0$, γιατί $\xi > \frac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow e^\xi > e^0 = 1 \Leftrightarrow e^\xi - 1 > 0$, $\sigma\upsilon\nu\xi < 0$ και $\eta\mu\xi > 0 \Leftrightarrow e^{\eta\mu\xi} > 1 \Leftrightarrow 1 - e^{\eta\mu\xi} < 0$, άρα η εξίσωση $g'(\xi) = 0$ είναι αδύνατη.

Οπότε η εξίσωση $f(x) = 1$ δεν έχει δύο ρίζες στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ και έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα αυτό.